Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Appello straordinario, 4 novembre 2019

Domanda 1 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ 2 - x^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$ Allora

A) $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1$ B) f è derivabile nel punto $x = 0$
C) f è continua in $(-\infty, 0]$ D) $f'(0) = +\infty$

A

Domanda 2 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\cos(x^2)}{x^2}$
A) ha minimo B) è superiormente limitata ma non ha massimo
C) è inferiormente limitata ma non ha minimo D) ha massimo

A

Domanda 3 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x^3 + \sin(x^3)$
A) ha infiniti punti di massimo locale B) è debolmente crescente
C) non ha limite per x che tende a $+\infty$ D) è limitata

B

Domanda 4 La successione $a_n = \log(n^2 + 1) - n$
A) non è limitata inferiormente B) strettamente crescente e limitata superiormente
C) strettamente decrescente e limitata inferiormente D) non è limitata superiormente

A

Domanda 5 La successione $a_n = \dfrac{3^n - 3^{n \log n}}{n^n}$, definita per $n \geq 1$,
A) tende a 0 B) tende a $-\infty$
C) tende a $+\infty$ D) non ha limite

B

Domanda 6 La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^3} e^{t^2} - 1, dt$
A) è debolmente decrescente B) ha massimo
C) ha minimo D) è debolmente crescente

D

Domanda 7
$$\int_{-3}^{-2} \frac{x+3}{2-x}\, dx =$$
A) $\dfrac{1}{4}$ B) $-1 + 5 \log \dfrac{5}{4}$ C) non esiste D) $5 \log 4 - 5 \log 5$

B

Domanda 8 La funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^x (\sin t)^2 \, (\cos t)^3 \, dt$
A) è strettamente positiva in un intorno di $x = 0$ B) ha un punto di minimo locale per $x = 0$
C) è debolmente decrescente in $\mathbb{R}$ D) è debolmente crescente in un intorno di $x = 0$

D

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y \tan x + x \\ y(0) = -1 \end{cases}$ Allora $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} y(x) =$
A) $+\infty$ B) -2 C) 0 D) $-\infty$

D

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 3y' - 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -15. \end{cases}$ Allora risulta che $\lim_{x \to +\infty} y(x) =$
A) $+\infty$ B) 0
C) $-\infty$ D) non esiste

C

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Appello straordinario, 4 novembre 2019

Esercizio 1

- Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$
determinandone insieme di definizione, asintoti (compresi quelli obliqui), estremi inferiore e superiore (o minimo e massimo), punti di massimo o minimo locali, eventuali punti angolosi o di cuspide. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

- Dato un punto z nell'insieme di definizione di f, si consideri la retta tangente al grafico nel punto $(z, f(z))$ e sia $P(z)$ il punto dove tale retta interseca l'asse x. Detta $g(z)$ l'area del triangolo di vertici $(0,0)$, $(z, f(z))$, $P(z)$ si stabilisca se la funzione $g(z)$ è inferiormente o superiormente limitata o, eventualmente, ha massimo o minimo.

Soluzione

La funzione è definita quando l'argomento della radice quadrata è maggiore o uguale a zero e quando il denominatore non si annulla. Avremo quindi

$$4 - x^2 \geq 0, x \neq 0 \iff 0 < |x| \leq 2 \iff x \in [-2, 0) \cup (0, 2].$$

La funzione è continua in tutto il suo insieme di definizione. Osserviamo anche che

$$f(-x) = \frac{\sqrt{4-(-x)^2}}{-x} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} = -f(x)$$

quindi f è dispari. La studieremo per $x \in (0, 2]$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\sqrt{4-0}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = 0.$$

Per simmetria avremo che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad f(-2) = 0.$$

Dai limiti otteniamo che la funzione non è limitata né superiormente né inferiormente, quindi non ha né massimo né minimo. La funzione ha inoltre un asintoto verticale di equazione $x = 0$. Vediamo ora la derivata:

$$f'(x) = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}x - \sqrt{4-x^2}}{x^2} = \frac{-x^2 - (4-x^2)}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-4}{x^2\sqrt{4-x^2}} \, .$$

Osserviamo che la derivata non è definita per $x = \pm 2$. Dato che la funzione è continua in tali punti, proviamo a deciderne la derivabilità facendo il limite della derivata.

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

quindi la funzione non è derivabile in $x = 2$ ed ha tangente verticale. Analogamente avremo che $f'(-2) = -\infty$ ed anche in questo punto la tangente è verticale. Si tratta di punti di semi-cuspide. Il segno della derivata è immediato

$$f'(x) < 0 \iff x \in [-2, 0) \cup (0, 2]$$

quindi f è strettamente decrescente in $[-2, 0)$ e in $(0, 2]$. Il punto $x = -2$ è di massimo locale mentre il punto $x = 2$ è di minimo locale.

Scriviamo ora l'equazione della retta tangente nel generico punto di ascissa $z \in (0,2)$ che è

$$y = f(z) + f'(z)(x-z) = \frac{\sqrt{4-z^2}}{z} - \frac{4}{z^2\sqrt{4-z^2}}(x-z)\ .$$

Tale retta interseca l'asse x quando $y=0$ quindi risolviamo rispetto a x l'equazione

$$\frac{\sqrt{4-z^2}}{z} - \frac{4}{z^2\sqrt{4-z^2}}(x-z) = 0.$$

Moltiplicando per $z^2\sqrt{4-z^2}$ (ricordando che $z \neq 0,\ z \neq 2$) otteniamo

$$z(4-z^2) - 4(x-z) = 0 \iff z(4-z^2) = 4x - 4z \iff z(4-z^2) + 4z = 4x \iff x = \frac{z(8-z^2)}{4}\,.$$

Il punto $P(z)$ ha quindi coordinate $\left(\frac{z(8-z^2)}{4}, 0\right)$. Il triangolo cercato è un triangolo di base $\frac{z(8-z^2)}{4}$ e altezza $f(z)$ quindi la sua area risulta

$$g(z) = \frac{1}{2}\,\frac{z(8-z^2)}{4} f(z) = \frac{z(8-z^2)}{8}\,\frac{\sqrt{4-z^2}}{z} = \frac{(8-z^2)\sqrt{4-z^2}}{8}\,.$$

La funzione g è chiaramente decrescente essendo prodotto di funzioni decrescenti e positive (ricordiamo che $z \in (0,2]$). Possiamo alternativamente verificarlo con il segno della derivata:

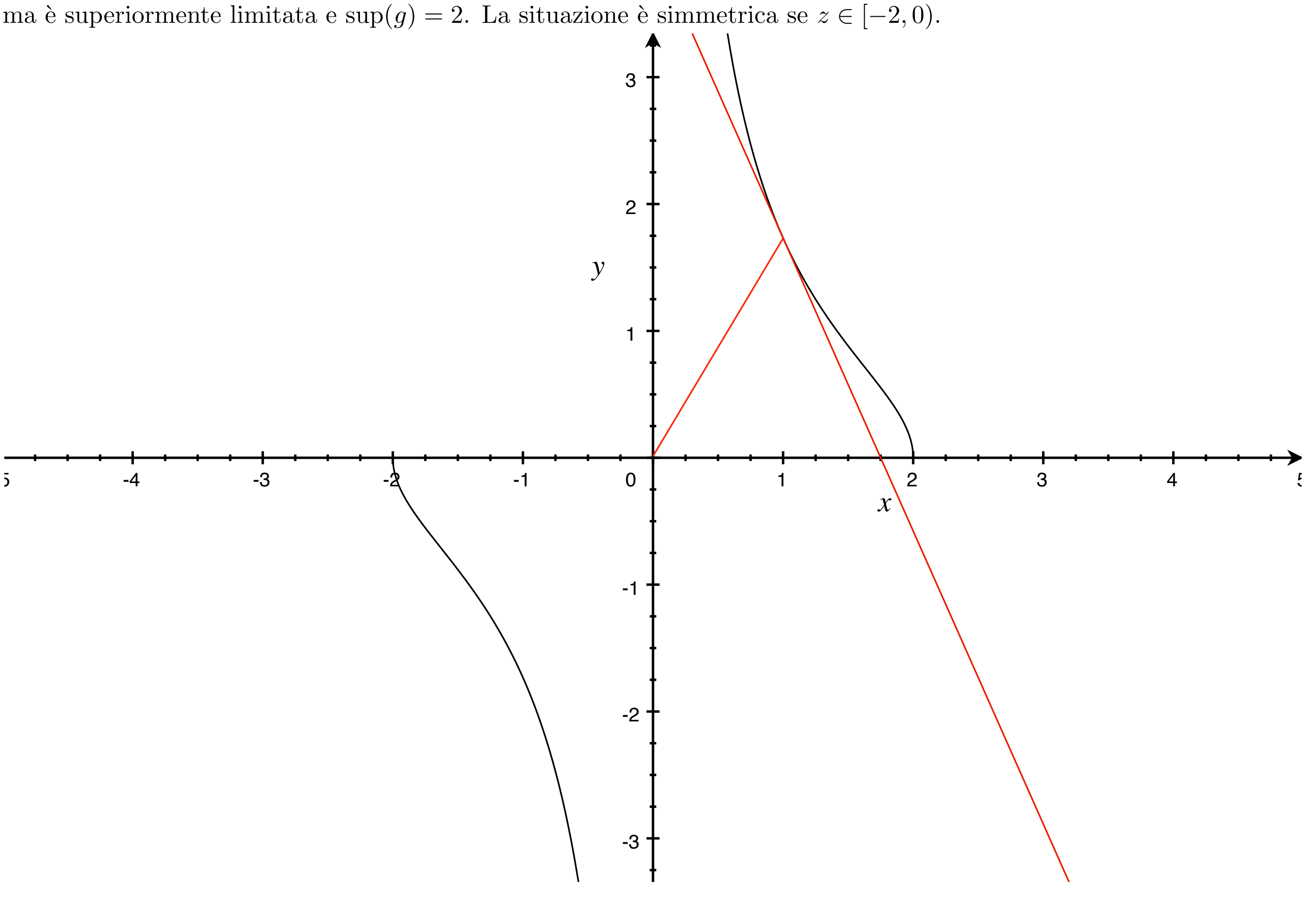
$$g'(z) = \frac{1}{8}\left(-2z\sqrt{4-z^2} + (8-z^2)\frac{-2z}{2\sqrt{4-z^2}}\right)$$

che è somma di termini negativi nell'intervallo considerato. Ne segue che g è strettamente decrescente in $(0,2)$ quindi

$$\sup(g) = \lim_{z\to 0^+} g(z) = \frac{8\sqrt{4}}{8} = 2$$

$$\inf(g) = \lim_{z\to 2^-} g(z) = \frac{(8-4)\sqrt{4-4}}{8} = 0\,.$$

Osserviamo infine che abbiamo escluso il punto $z=2$ perchè non è possibile scrivere la derivata in tale punto, ma la tangente in $z=2$ esiste ed è verticale, pertanto in tale punto due dei vertici del triangolo coincidono e formano un triangolo degenere di area nulla. Possiamo quindi dire che la funzione g ammette minimo (che vale 0), non ha massimo ma è superiormente limitata e $\sup(g) = 2$. La situazione è simmetrica se $z \in [-2,0)$.



Esercizio 2 Calcolare

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}\cos(3x+2)\,dx.$$

Soluzione

Calcoliamo una primitiva della funzione eseguendo un'integrazione per parti due volte. Integriamo e^{2x} e deriviamo $\cos(3x+2)$:

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\cos(3x+2)\,dx &= \frac{e^{2x}}{2}\cos(3x+2)\,dx - \int \frac{e^{2x}}{2}(-3\sin(3x+2))\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\cos(3x+2) + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin(3x+2)\,dx \\ &= \frac{e^{2x}}{2}\cos(3x+2) + \frac{3}{2}\left(\frac{e^{2x}}{2}\sin(3x+2) - \int \frac{e^{2x}}{2}3\cos(3x+2)\,dx\right) \\ &= \frac{e^{2x}}{2}\cos(3x+2) + \frac{3}{4}e^{2x}\sin(3x+2) - \frac{9}{4}\int e^{2x}\cos(3x+2)\,dx\,.\end{aligned}$$

Riportando al primo membro l'ultimo integrale otteniamo

$$\frac{13}{4}\int e^{2x}\cos(3x+2)\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\left(\cos(3x+2) + \frac{3}{2}\sin(3x+2)\right) + c.$$

Quindi

$$\int e^{2x}\cos(3x+2)\,dx = \frac{2e^{2x}}{13}\left(\cos(3x+2) + \frac{3}{2}\sin(3x+2)\right) + c.$$

Possiamo ora calcolare l'integrale definito utilizzando il teorema di Torricelli

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} e^{2x}\cos(3x+2)\,dx &= \frac{2}{13}\left[e^{2x}\left(\cos(3x+2) + \frac{3}{2}\sin(3x+2)\right)\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{2}{13}\left(e^{2}\left(\cos 5 + \frac{3}{2}\sin 5\right) - e^{-2}\left(\cos(1) + \frac{3}{2}\sin(1)\right)\right).\end{aligned}$$

Esercizio 3 Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-x}y^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

e trovare il più grande intervallo contenente $x = 0$ dove la soluzione è definita.

Soluzione

L'equazione differenziale è a variabili separabili. Dato che $y(0) \neq 0$, possiamo dividere per y^2 ottenendo

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int e^{-x}\,dx$$

quindi

$$-\frac{1}{y} = -e^{-x} + c.$$

Determiniamo subito la costante c utilizzando la condizione iniziale. Sostituiamo quindi $x = 0$ e $y = 2$ per ricavare c:

$$-\frac{1}{2} = -e^{0} + c \iff -\frac{1}{2} + 1 = c \iff c = \frac{1}{2}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi data da

$$-\frac{1}{y} = -e^{-x} + \frac{1}{2} \iff \frac{1}{y} = e^{-x} - \frac{1}{2} \iff y = \frac{2}{2e^{-x} - 1}\,.$$

Osserviamo che la funzione ottenuta è definita quando

$$2e^{-x} - 1 \neq 0 \iff e^{-x} \neq \frac{1}{2} \iff e^{x} \neq 2 \iff x \neq \log 2.$$

Dato che $\log 2 > 0$ otteniamo che il più grande intervallo contenente $x = 0$ dove è definita la soluzione è la semiretta $(-\infty, \log 2)$.